

STATICS AWARE VORONOI GRID-SHELLS

Discussione tesi di dottorato
Pisa, 2015

Dottorando: Davide Tonelli
Supervisore: Prof. Maurizio Froli



Statics Aware Voronoi Grid-Shells

Sono free-form grid-shells, progettate con un nuovo *pattern poligonale*, che sono al contempo:

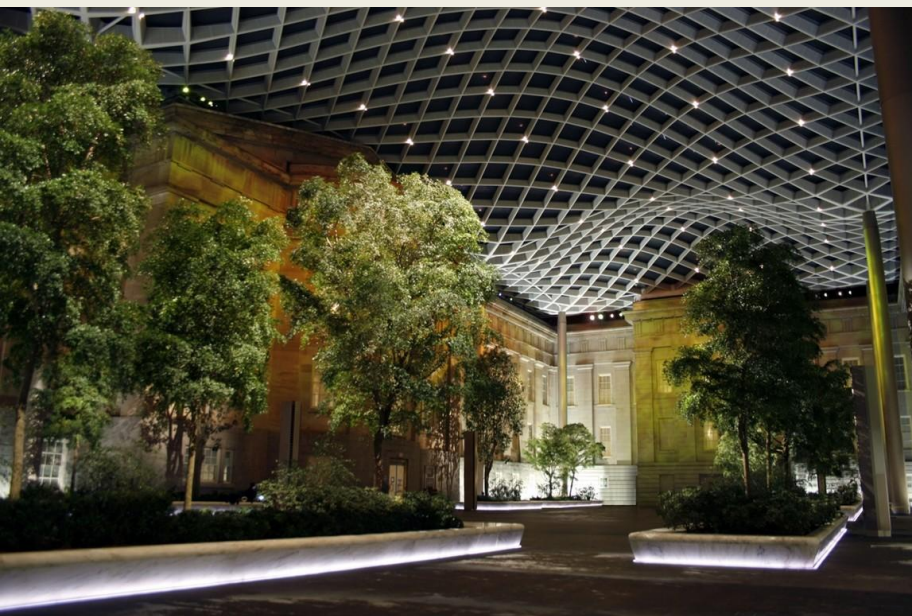
- ***innovative;***
- ***gradevoli esteticamente;***
- ***stabili e resistenti.***



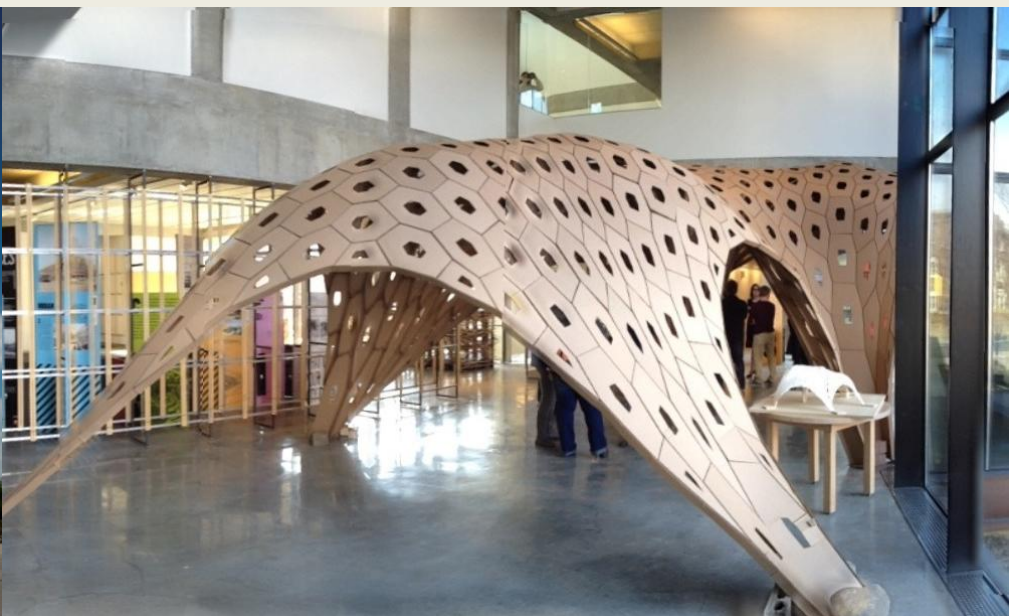
Grid-Shells: Prima e Dopo



Grid-Shells: *Prima e Dopo*



Grid-Shells: Prima e Dopo



Cosa è una *Grid-Shell*

Uno *scolapasta* è uno shell.



Un *setaccio* è una grid-shell.



Cosa è una *Grid-Shell*

Uno ***SHELL ben progettato*** (cioè che minimizza qualche funzione integrale, come ad esempio l'energia di deformazione U)

e ben ***vincolato*** (in modo tale che solo deformazioni estensionali - cioè che cambiano le lunghezze sulla superficie - siano possibili)

è una ***struttura molto efficace.***

Cosa è una *Grid-Shell*

Una **GRID-SHELL** ben progettata

ben vincolata

potrebbe non essere una struttura efficace

perchè **altre variabili** ne influenzano il comportamento.

Cosa è una *Grid-Shell*

Tra queste, la rigidezza dei giunti e la

TOPOLOGIA della griglia

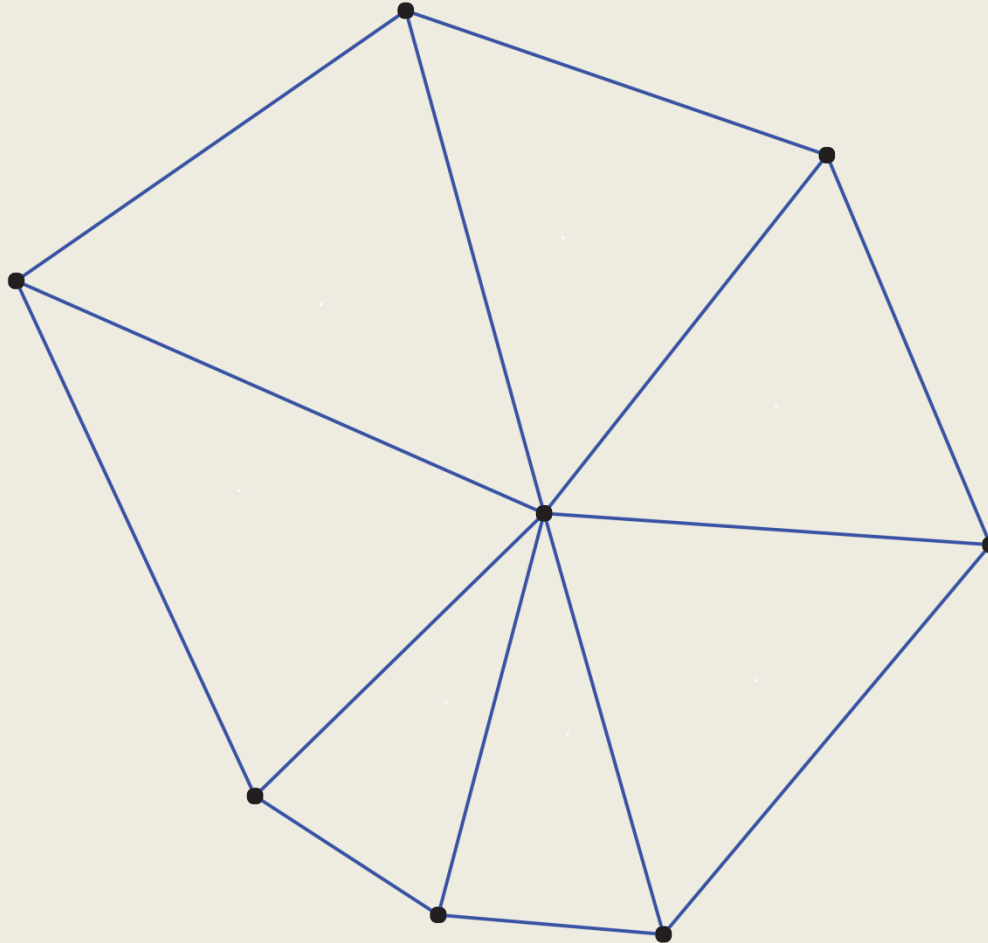
sono cruciali.



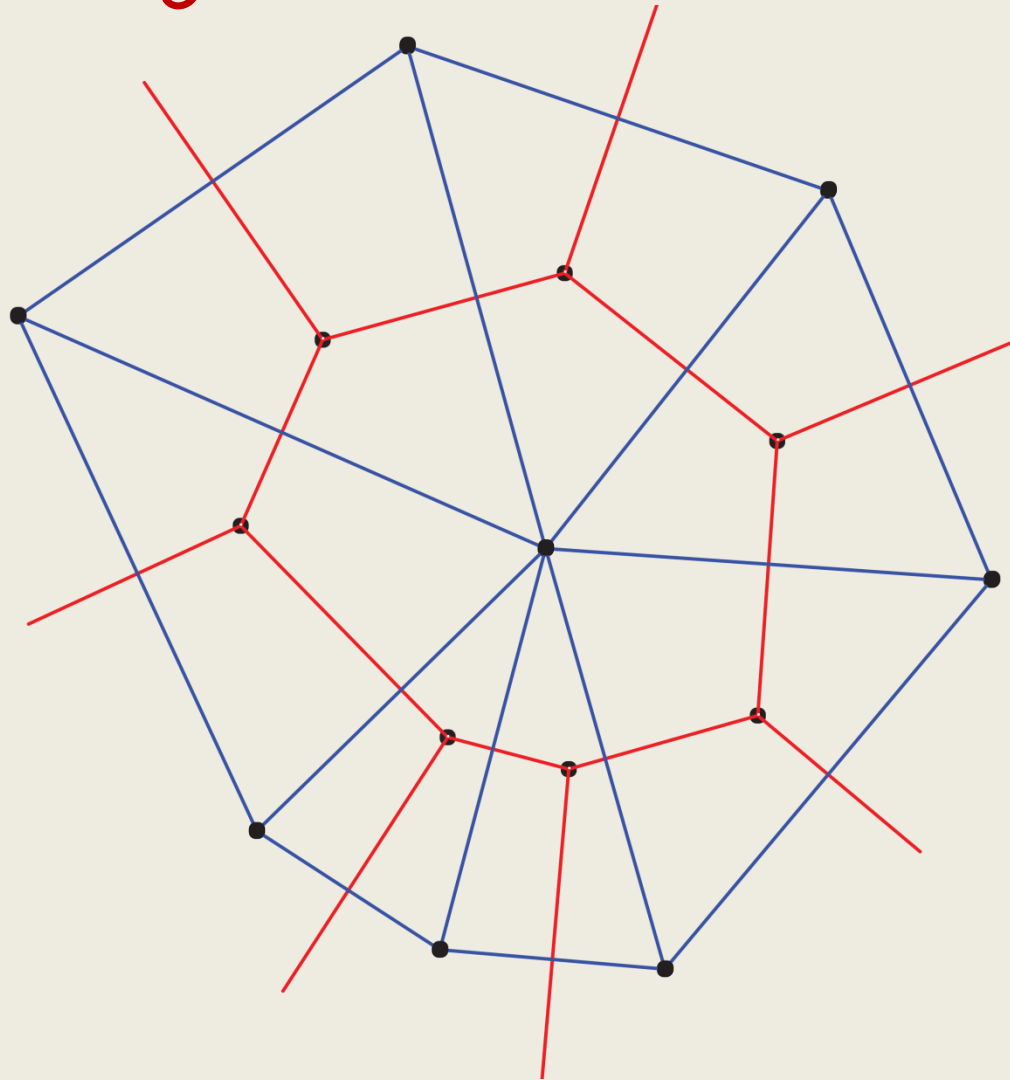
Cosa è un diagramma di Voronoi



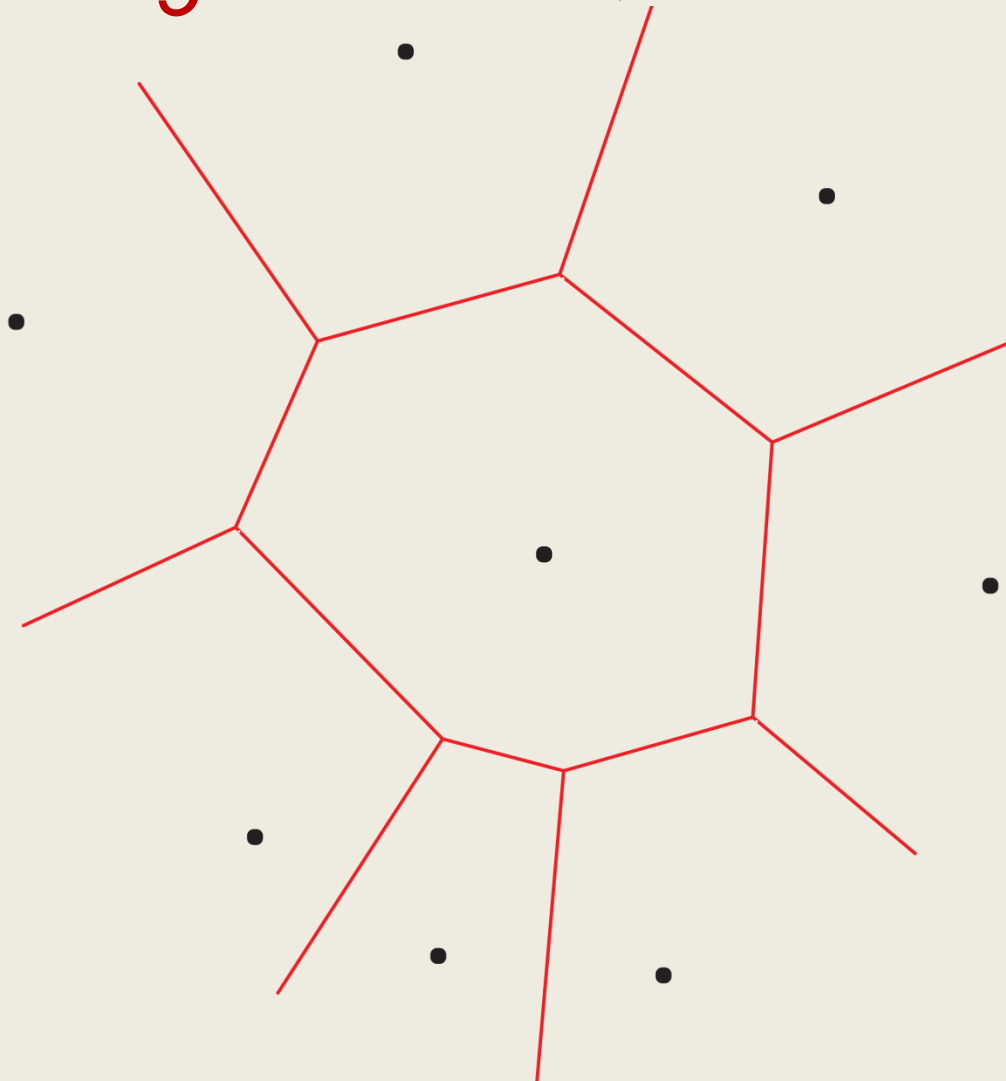
Cosa è un diagramma di Voronoi



Cosa è un diagramma di Voronoi



Cosa è un diagramma di Voronoi



Cosa è una Topologia *Voronoi-like*

È una **TOPOLOGIA** a prevalenza esagonale con una valenza dei vertici costante e pari a 3.

È l'unica topologia che porta a mesh semi-regolari (cioè non con sempre lo stesso poligono ripetuto) con tutti i vertici regolari (cioè con la stessa valenza: 3).



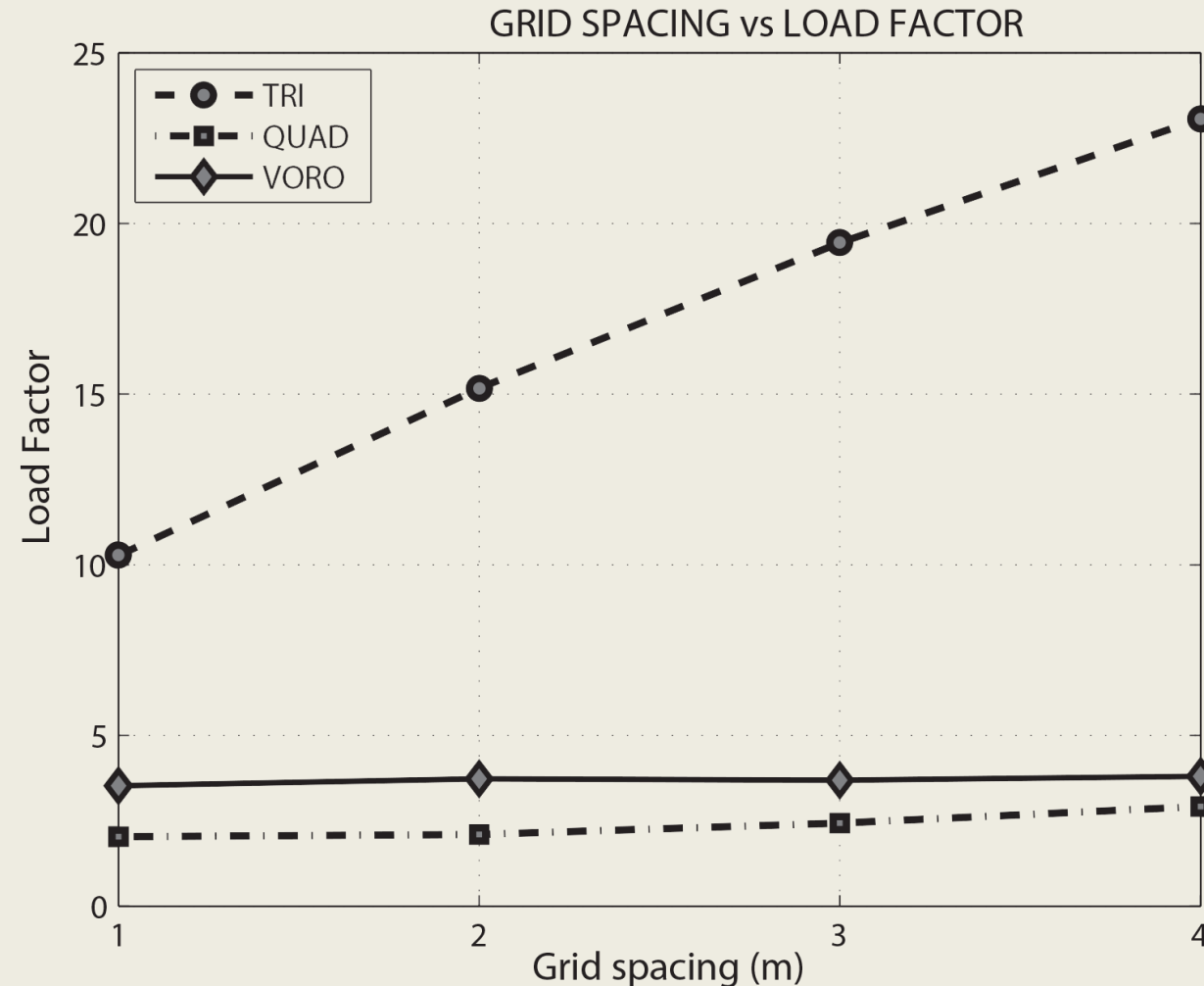
Topologia Voronoi-like in Natura



Topologia Voronoi-like riprodotta



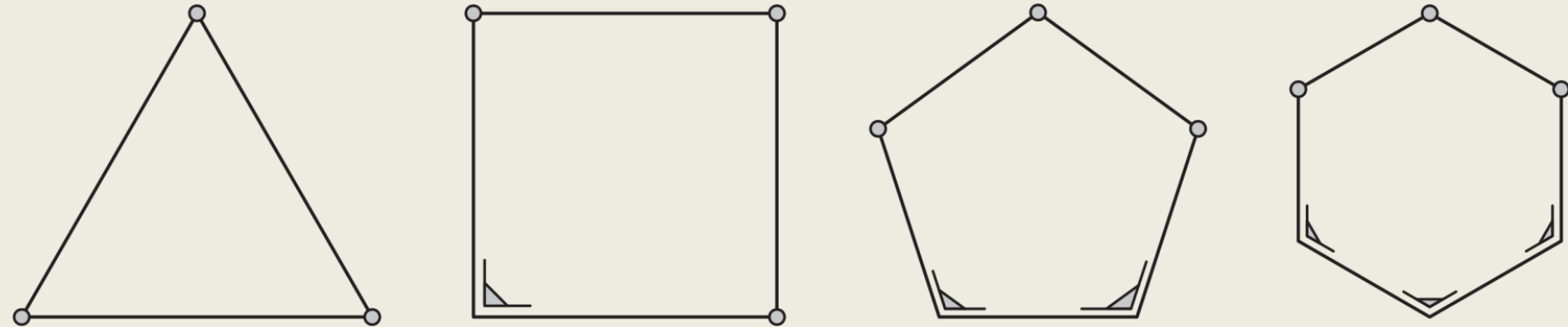
Topologia e Struttura



$M_{tot} = Const$
non garantisce
equivalenza
strutturale.

$M_{tot} = Const +$
 $L_{tot} = Const$
è invece un
criterio efficace.

Topologia e Struttura



Ogni n -gono è un meccanismo, a meno che $n - 3$ vertici siano rigidi (continui flessionalmente).

Qualunque poligono è meno rigido di un triangolo.

Topologia e Struttura

Topology	Eq. Membrane Stiffness	Eq. Bending Stiffness	Eq. Thickness
Triangular	$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{EA}{L}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EI}{L} \left(3 + \frac{GJ}{EI} \right)$	4.1ρ
Quad. (MAX Stiff.)	$\frac{EA}{L}$		4.1ρ
Quad. (MIN Stiff.)	$\frac{EI}{L} \frac{2}{\left(\rho^2 + \frac{L^2}{12} \right)}$	$\frac{EI}{L} \frac{(EI + 2GJ)}{(EI + GJ)}$	$0.85L$
Hexagonal	$\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{EI}{L} \frac{12}{(52\rho^2 + L^2)}$	$\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{EI}{L} \frac{GJ}{(EI + 3GJ)}$	$0.5L$

Analytical 'equivalent elastic properties' (membrane stiffness, bending stiffness, thickness) for the three regular tilings of the plane.



Topologia e Struttura

Topology	Eq. Membrane Stiffness ($\frac{\text{kN}}{\text{m}}$)	Eq. Bending Stiffness (kN m)	Eq. Thickness (mm)
Triangular	$2.506 \cdot 10^5$	55.06	50
Quad. (MAX Stiff.)	$3.172 \cdot 10^5$	~70	50
Quad. (MIN Stiff.)	$7.031 \cdot 10^2$		1100
Hexagonal	$7.164 \cdot 10^3$	54.94	312.5

Numerical 'equivalent elastic properties' (membrane stiffness, bending, stiffness, thickness) for the three regular tilings of the plane. The beams are considered being made of steel and having circular cross section of 50 mm of diameter ($EA = 412334 \text{ kN}$, $EI = 64.427 \text{ kNm}^2$).



Statics Awareness - Intuizione

Il remeshing della grid-shell è guidato dal regime statico della superficie.

L' INTUIZIONE:

Creare celle *più piccole* laddove gli sforzi sono alti ed *allungarle* lungo la direzione di sforzo principale, così da minimizzare U globale.

Questo dovrebbe generare grid-shells ottimali dal punto di vista statico.



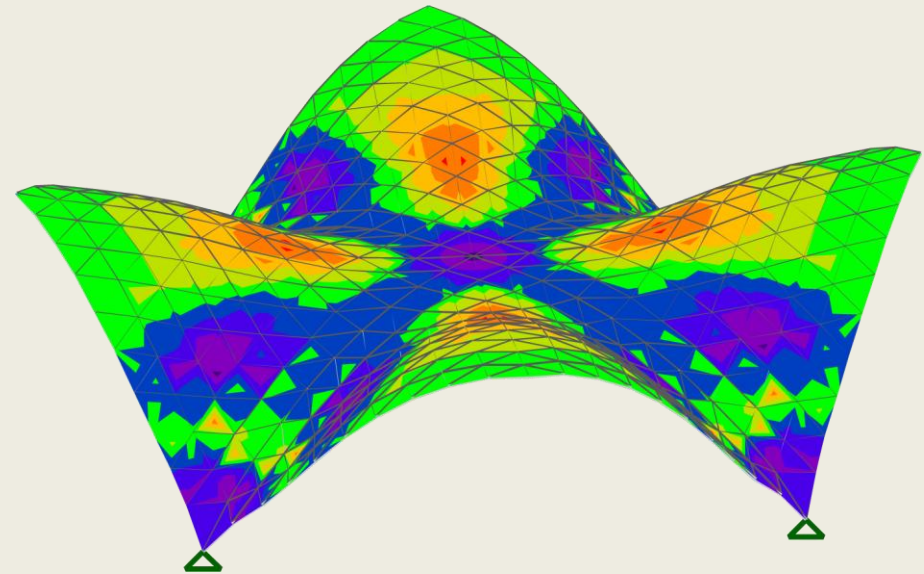
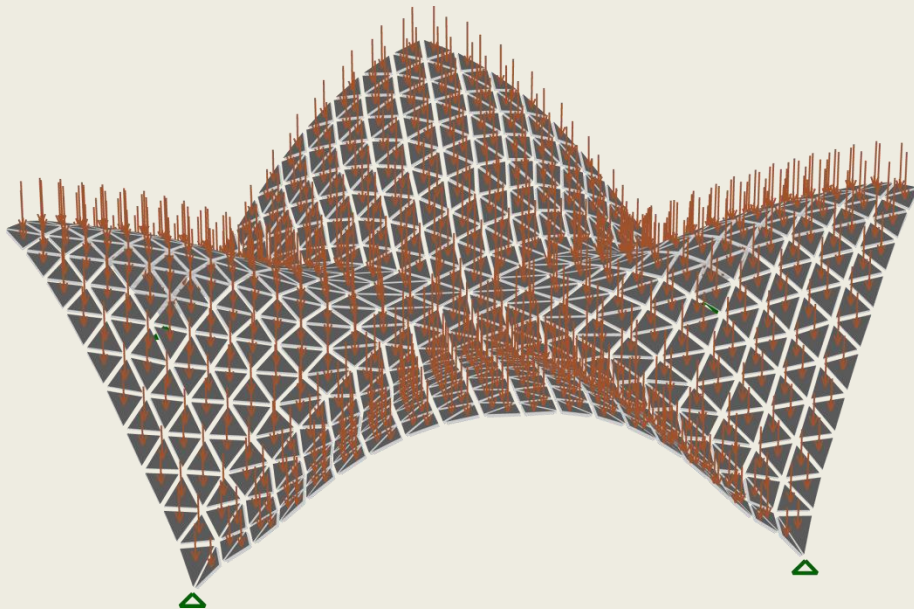
Statics Awareness - Pipeline

- 1- Calcolare il regime statico della superficie (stato di sforzo puntuale). La superficie è FISSA;
- 2- Definire funzioni **locali** densità ed anisotropia, rispettivamente per dimensionare e conformare le celle in funzione dello stato di sforzo locale;
- 3- Remeshare la superficie, ottenendo così una *grid-shell ottimale* (cioè che minimizza U globale).



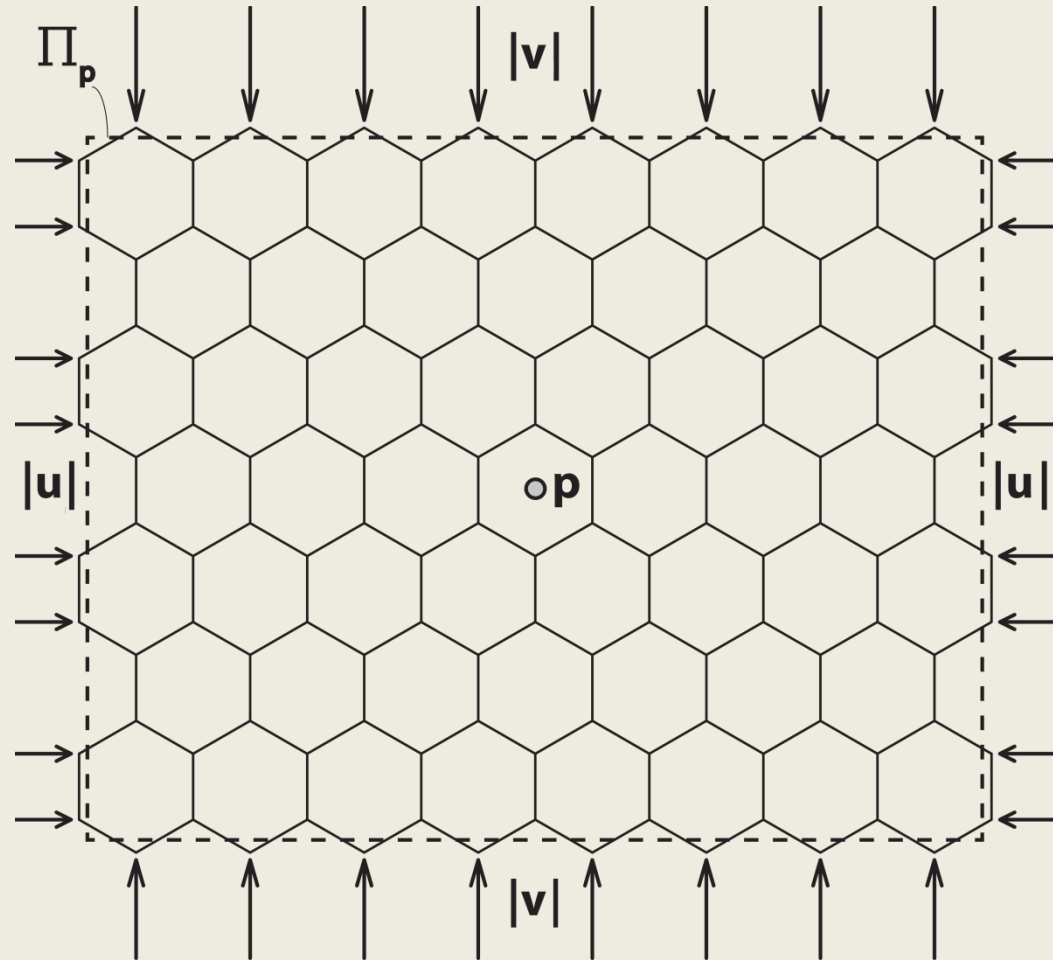
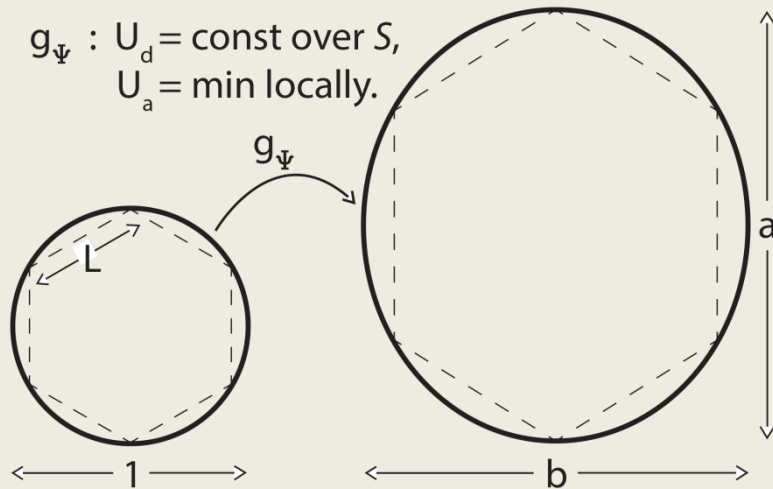
Statics Awareness

1 - Analisi F.E.M. elastica lineare della superficie.
Il tensore di sforzo viene computato per ogni elemento.



Statics Awareness

2 – Definizione di criteri di trasferimento locali.



Statics Awareness

DENSITÀ :

$$U_d(|u|, L) \propto |u|^2 L^3$$

L'energia di deformazione relativa alla *densità* di celle è quadratica nella norma dello sforzo principale e cubica nella lunghezza del lato delle celle.

Strain Energy $U(L)$



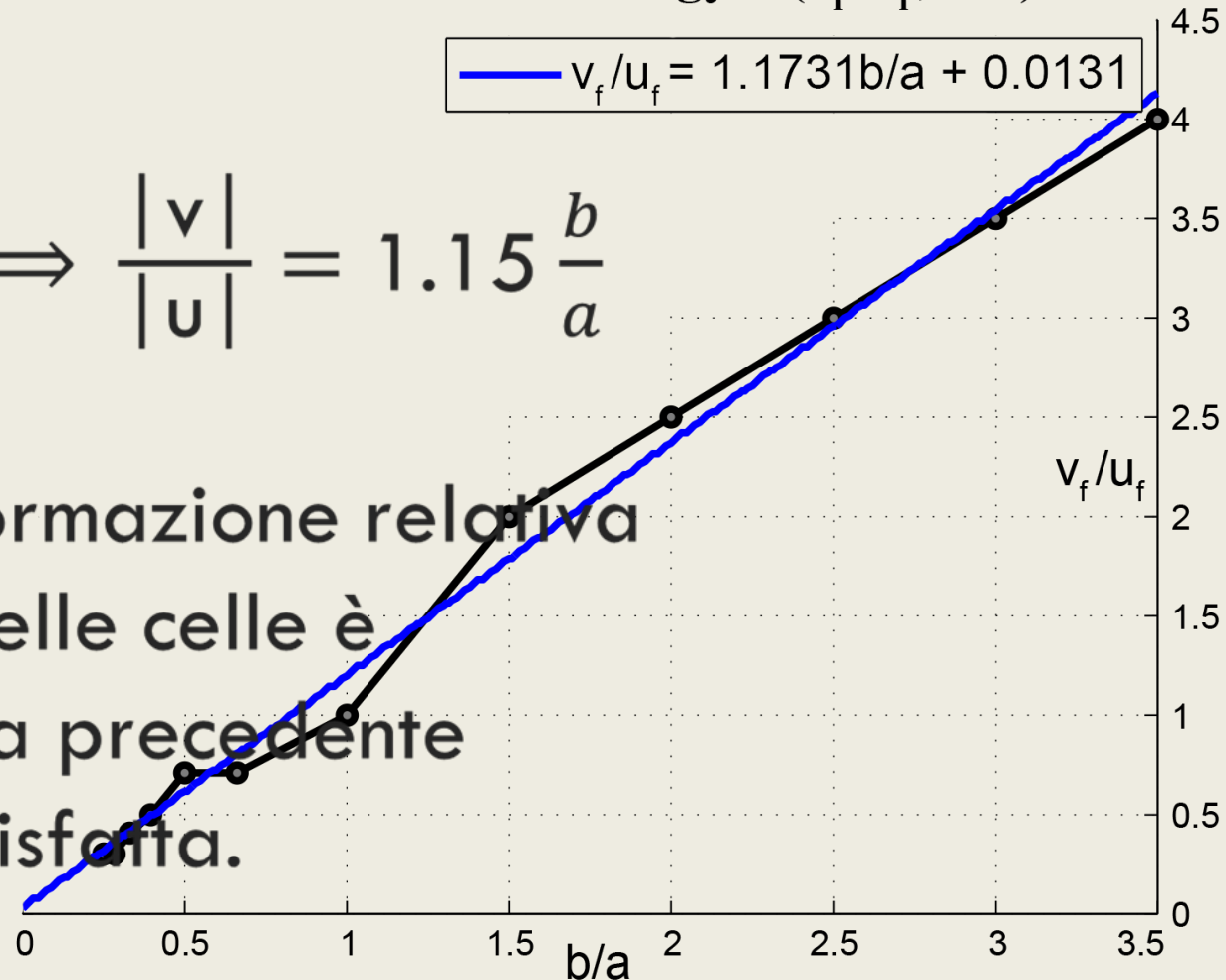
Statics Awareness

ANISOTROPIA:

Minimum Strain Energy $U(v_f/u_f, b/a)$

$$\min U_a \left(\frac{|v|}{|u|}, \frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{|v|}{|u|} = 1.15 \frac{b}{a}$$

L'energia di deformazione relativa
all' *anisotropia* delle celle è
minima quando la precedente
relazione è soddisfatta.



Statics Awareness

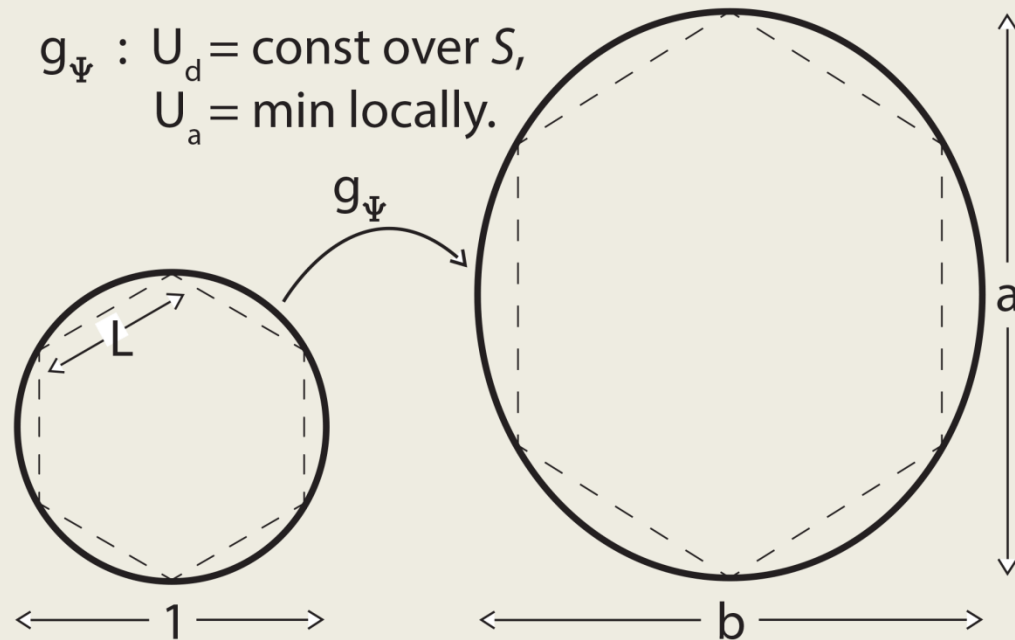
NUOVA METRICA:

$$g_{\psi} = W^{-T} W^{-1}$$

$$D = (|u| |v|)^{2/3}$$

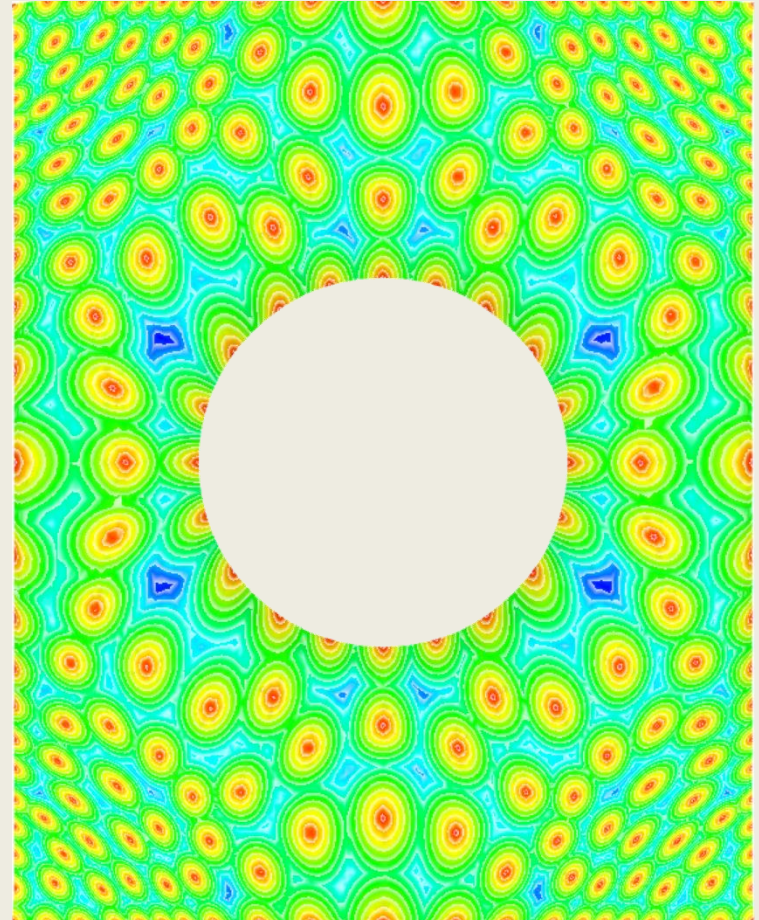
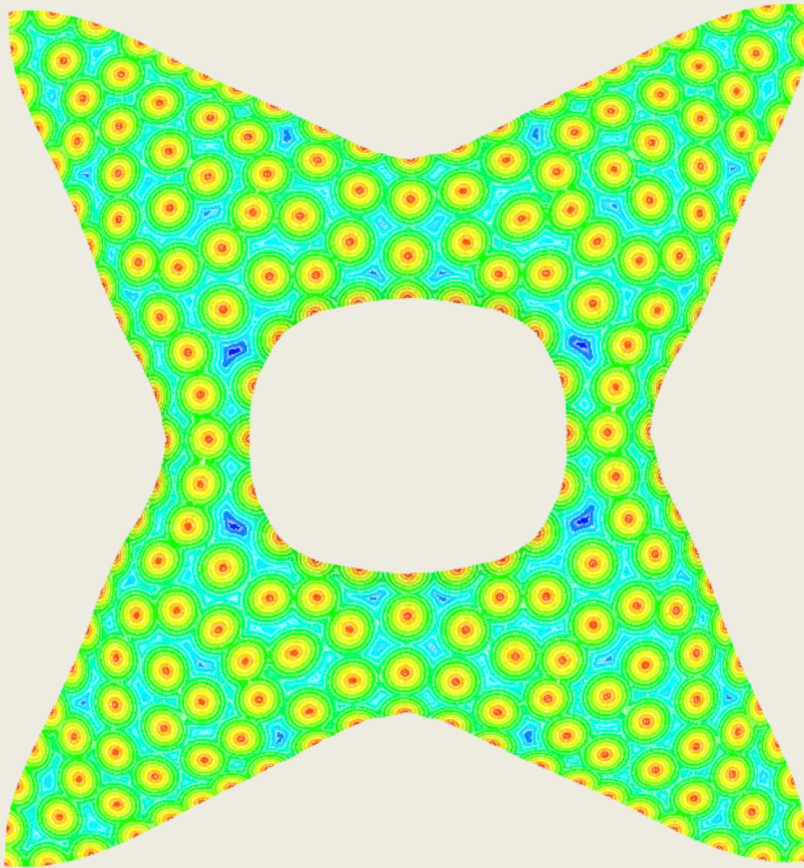
$$A = 0.85 \frac{|u|}{|v|}$$

$$W = \begin{bmatrix} \sqrt{DA} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{D}{A}} \end{bmatrix}$$



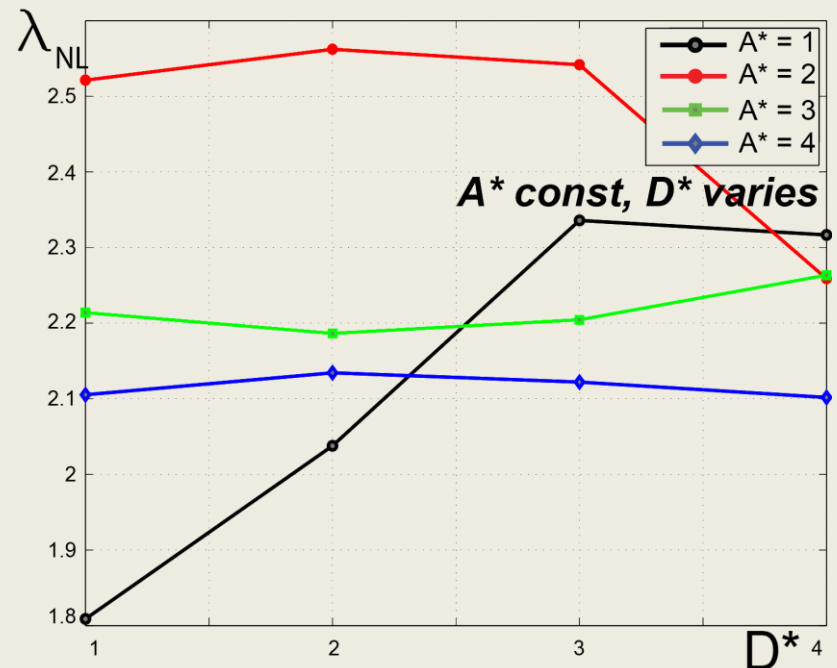
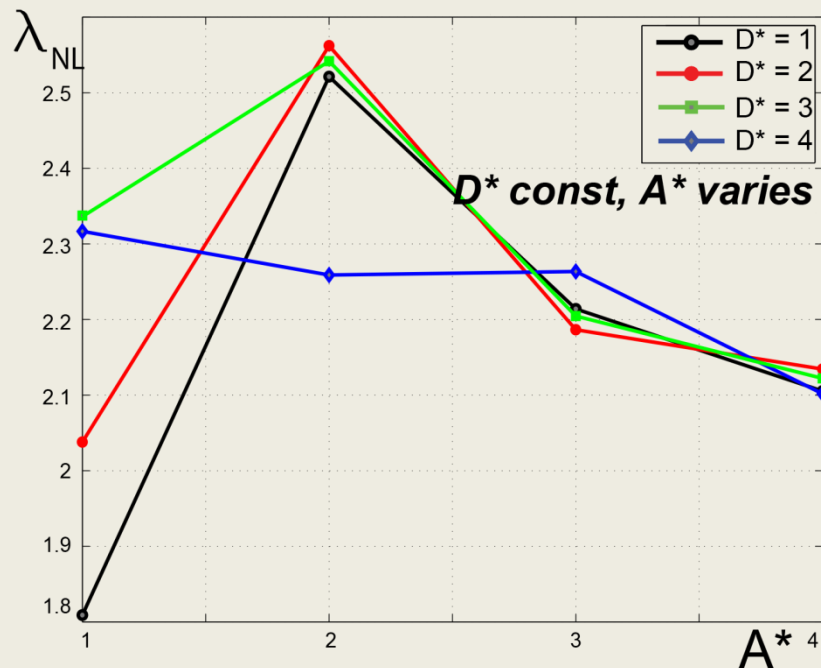
Statics Awareness

3 – Remeshing della Superficie.

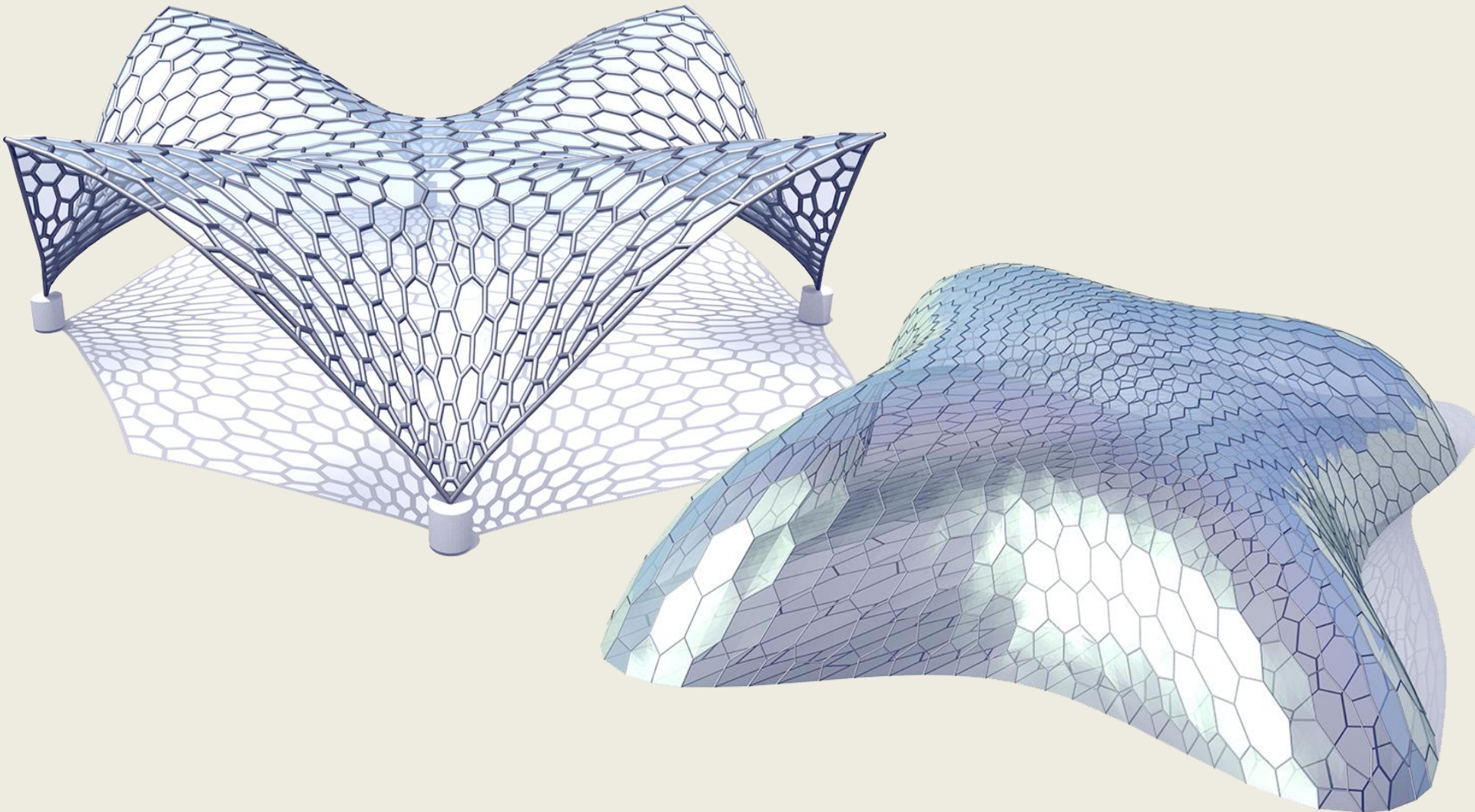


Statics Awareness

I parameters D , A possono essere regolati manualmente, riscalandoli in un intervallo definito dall'utente, solitamente compreso tra 1 e 4.

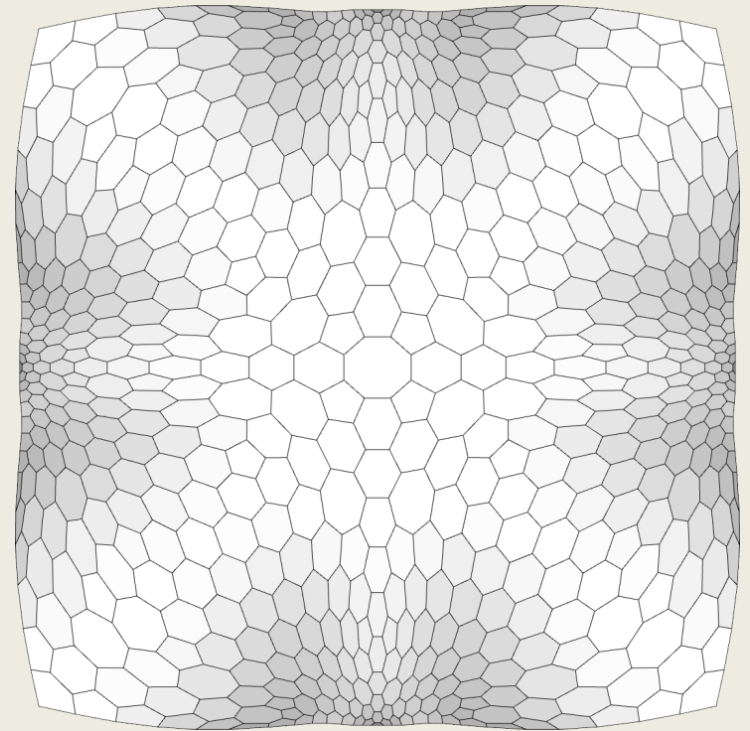
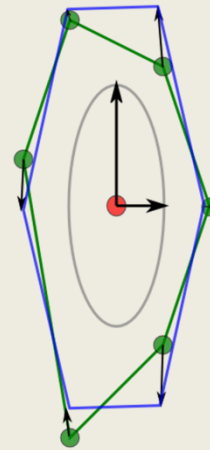
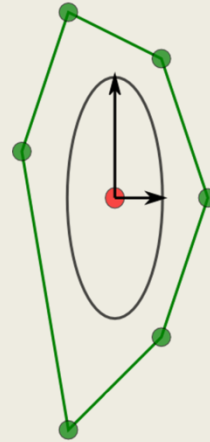
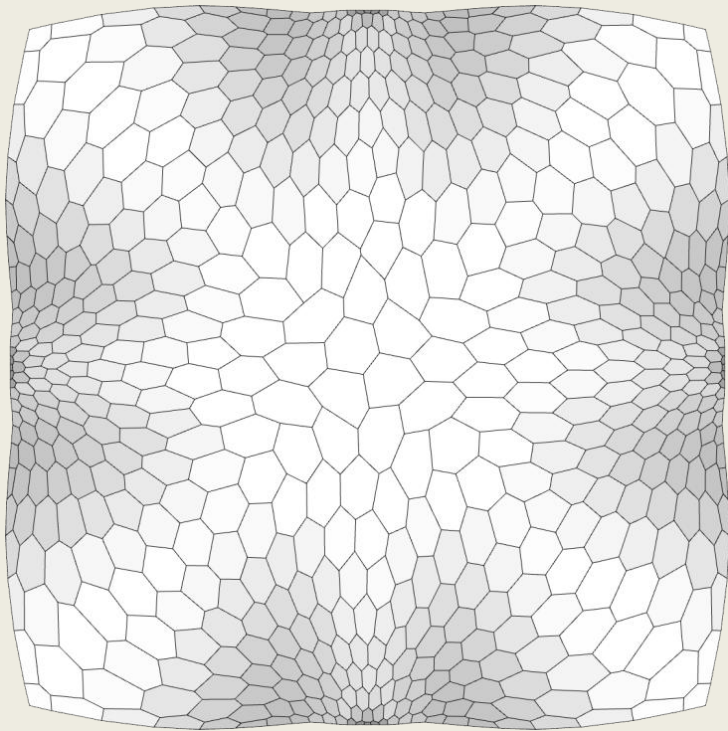


Statics Aware Voronoi Grid-Shells



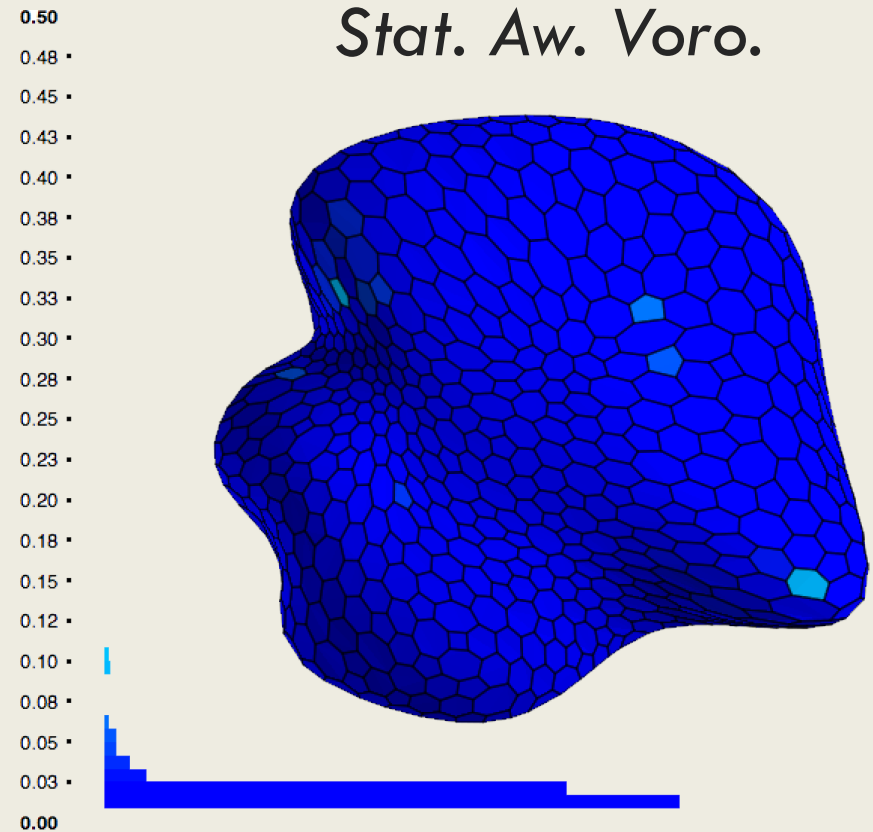
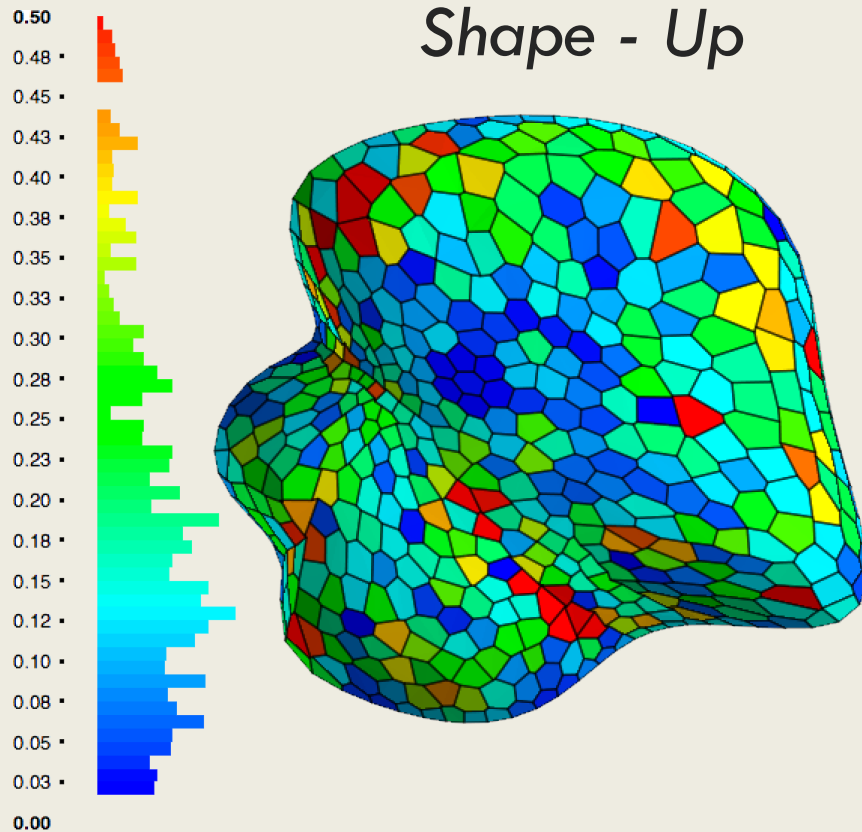
Miglioramento della Mesh

Algoritmo di
regolarizzazione



Miglioramento della Mesh

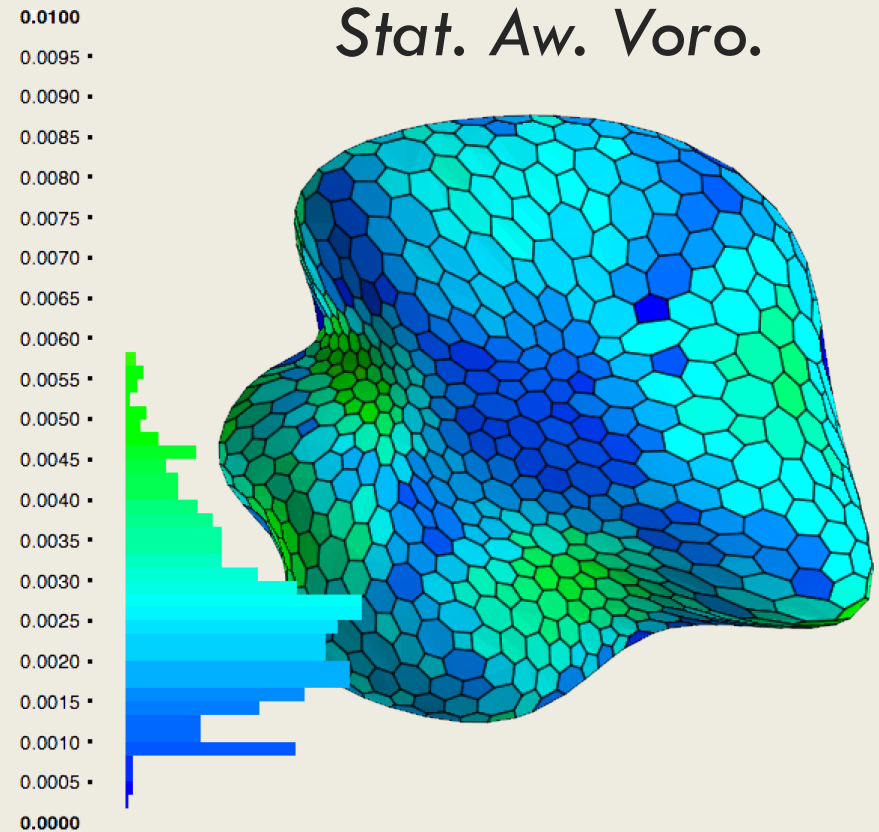
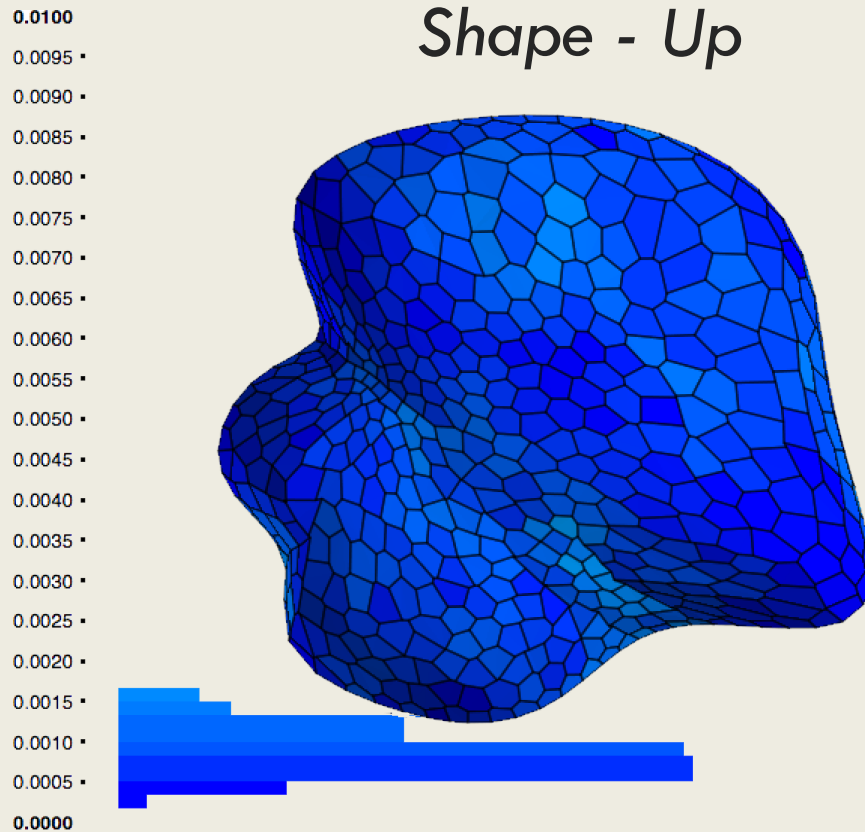
Regolarità – confronto dei risultati $Reg = \sum d_i^2 / A$



Miglioramento della Mesh

Planarità – confronto dei risultati

$$Plan = 2d_{av} / P$$



Performance

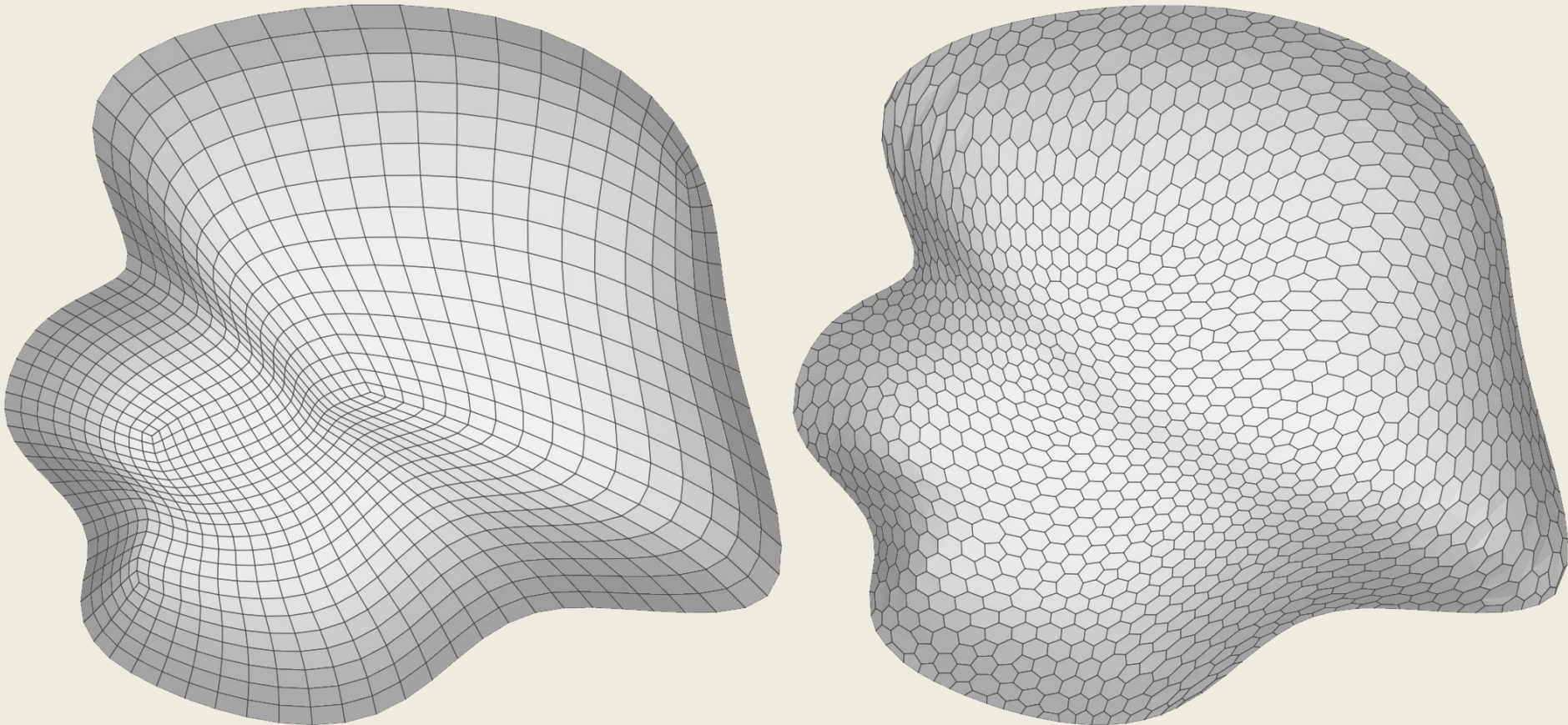
Dataset	Model	Geometry			Beams		Structural Analyses			
		Vert.	Faces	Edges	L_{tot} (m)	(φ_e, t) (mm)	q_{es} ($\frac{kN}{m^2}$)	δ_L (mm)	q_{slu} ($\frac{kN}{m^2}$)	λ_{NL}
Botanic	[TSG ⁺ 14]	1121	1076	2196	1989	(70,15)	2.3	335.4	3.4	0.83
	Voro (3,3)	2352	1177	3528	2016			171.6		1.48
British	[TSG ⁺ 14]	1648	1568	3216	4286	(100,15)	2.4	27.9	3.5	2.70
	Voro (3,3)	3460	1728	5188	4114			26.7		3.23
Lilium	[VHWP12]	665	645	1300	1147	(50.10)	2.1	77.6	3.1	1.42
	Voro (3,3)	1444	723	2166	1182			37.55		2.97

Statistics on datasets and results.



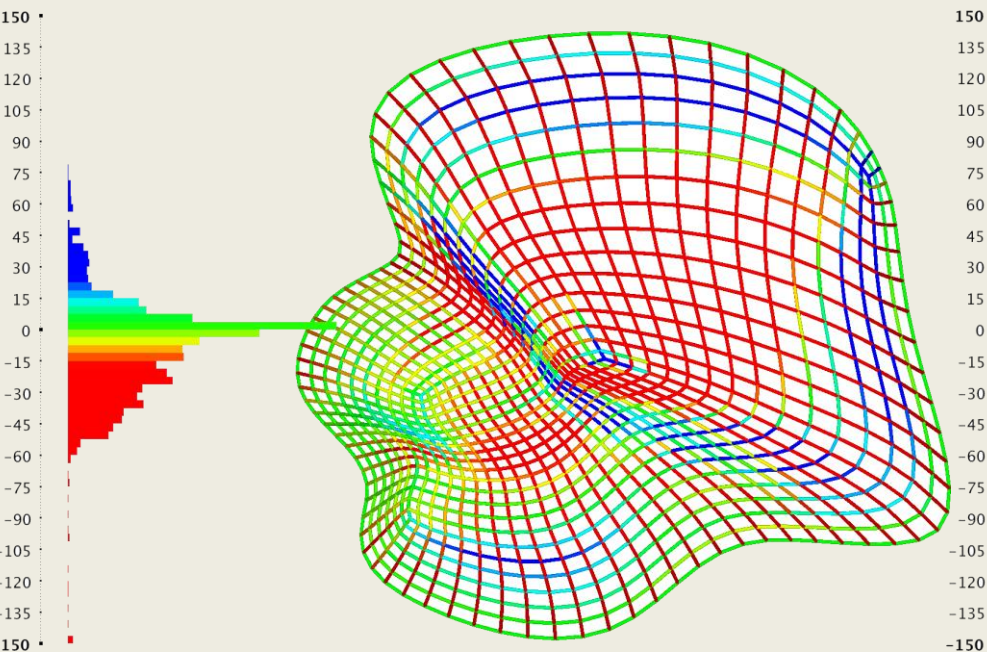
Performance

Botanic dataset

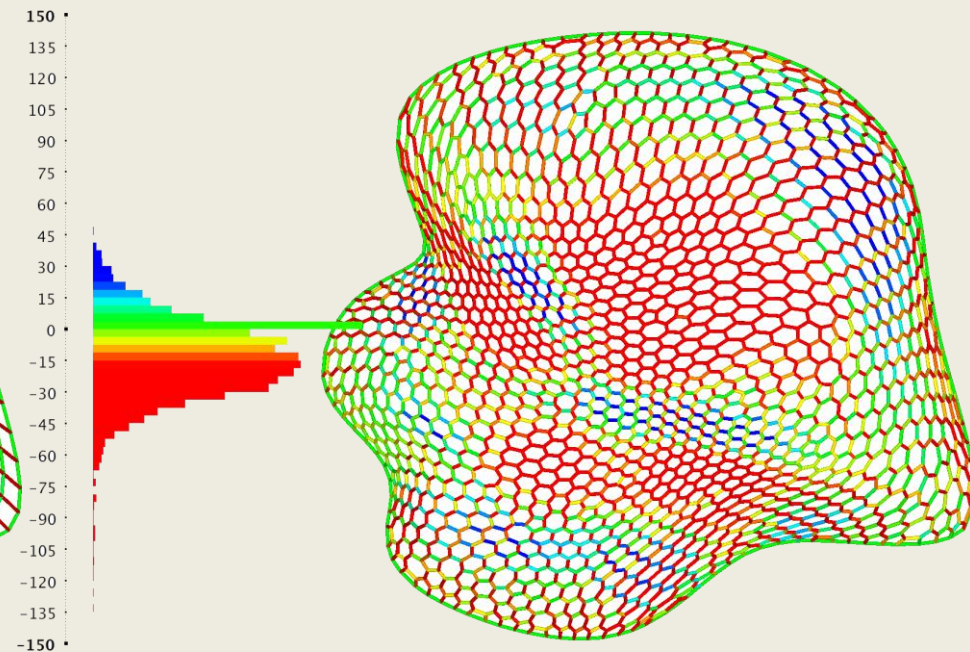


Performance

Botanic dataset – distribuzione delle forze assiali



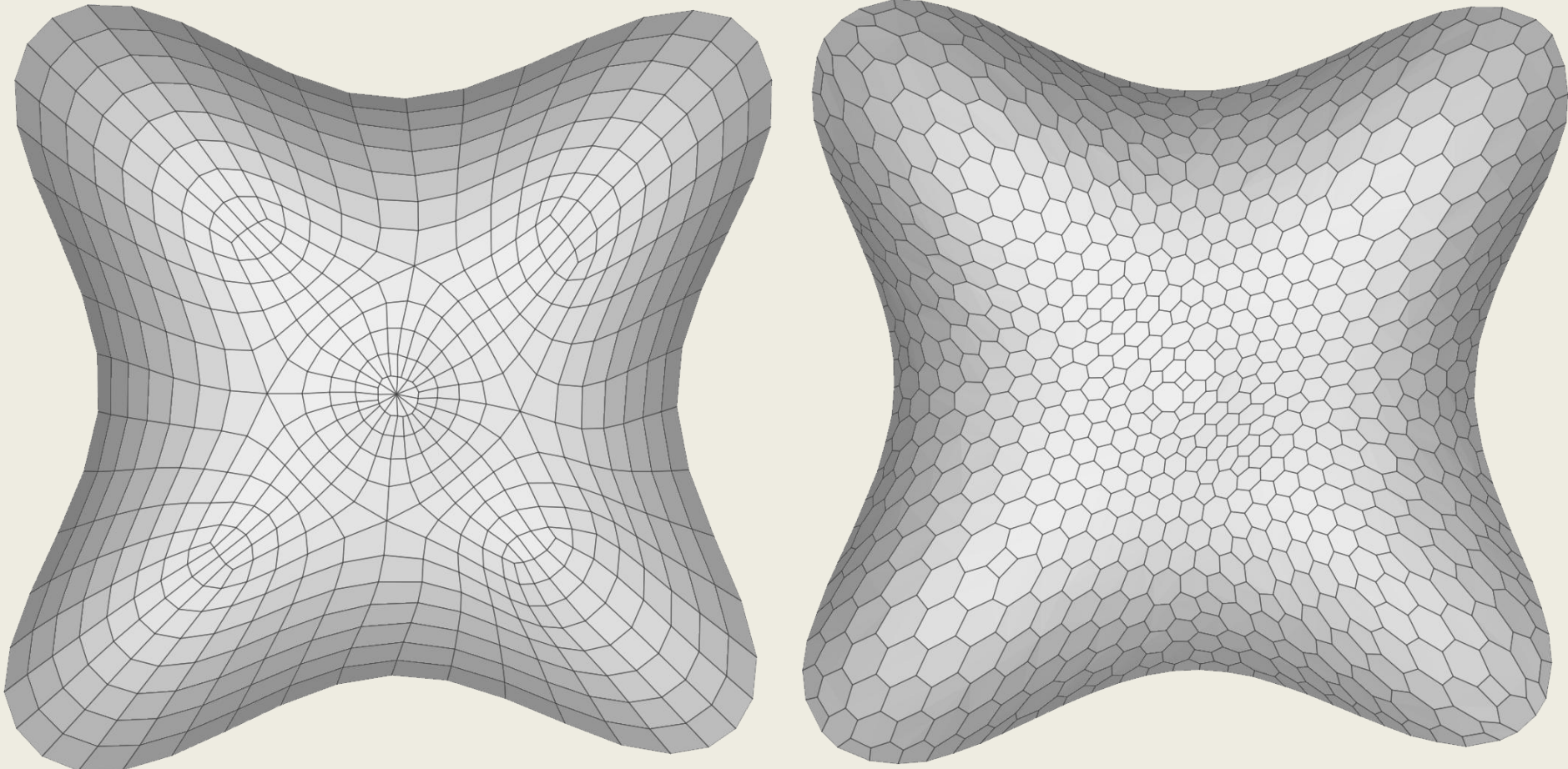
$$U_{\text{tot}} = 81329 \text{ J}$$
$$\lambda = 0.83, \delta = 335 \text{ mm}$$



$$U_{\text{tot}} = 32240 \text{ J}$$
$$\lambda = 1.48, \delta = 172 \text{ mm}$$

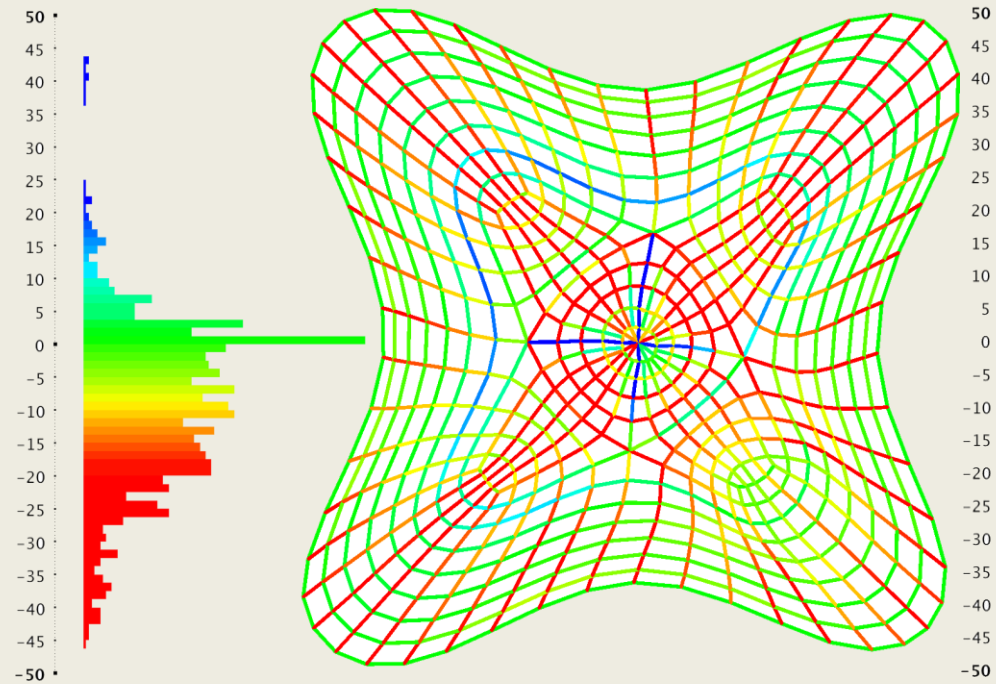
Performance

Lilium dataset



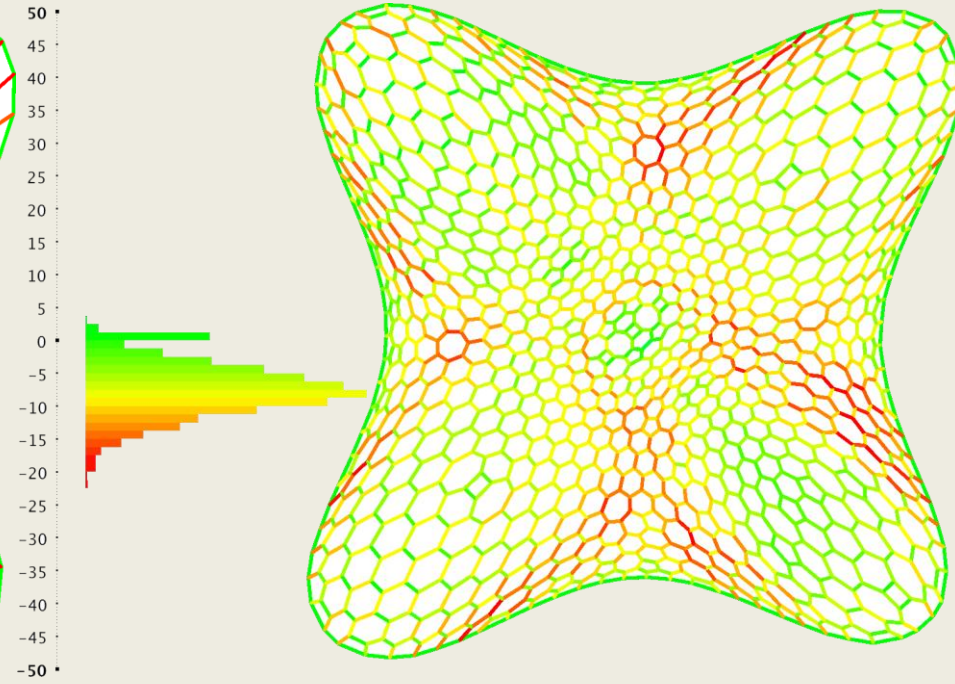
Performance

Lilium dataset – distribuzione delle forze assiali



$$U_{\text{tot}} = 2999 \text{ J}$$

$$\lambda = 1.42, \delta = 77.6 \text{ mm}$$

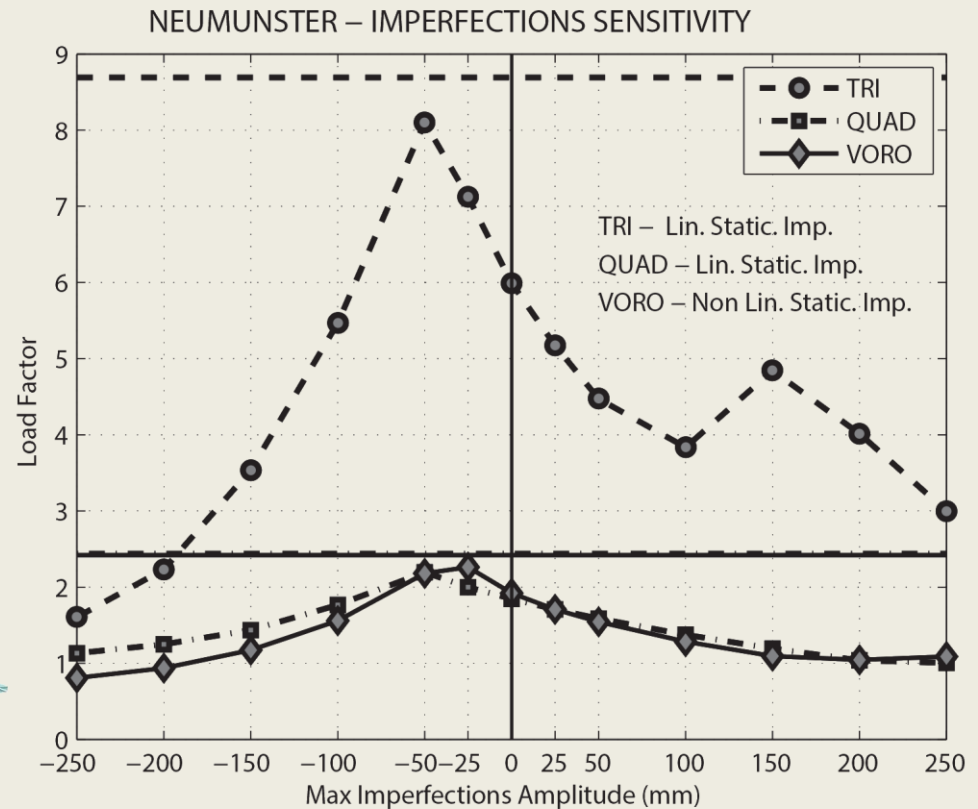
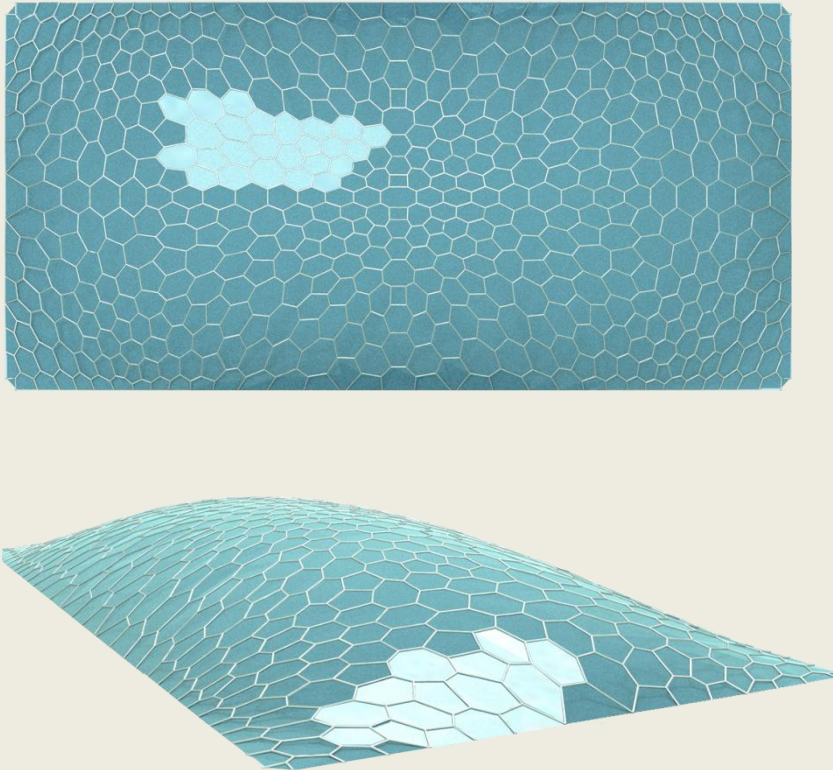


$$U_{\text{tot}} = 1846 \text{ J}$$

$$\lambda = 2.97, \delta = 37.6 \text{ mm}$$

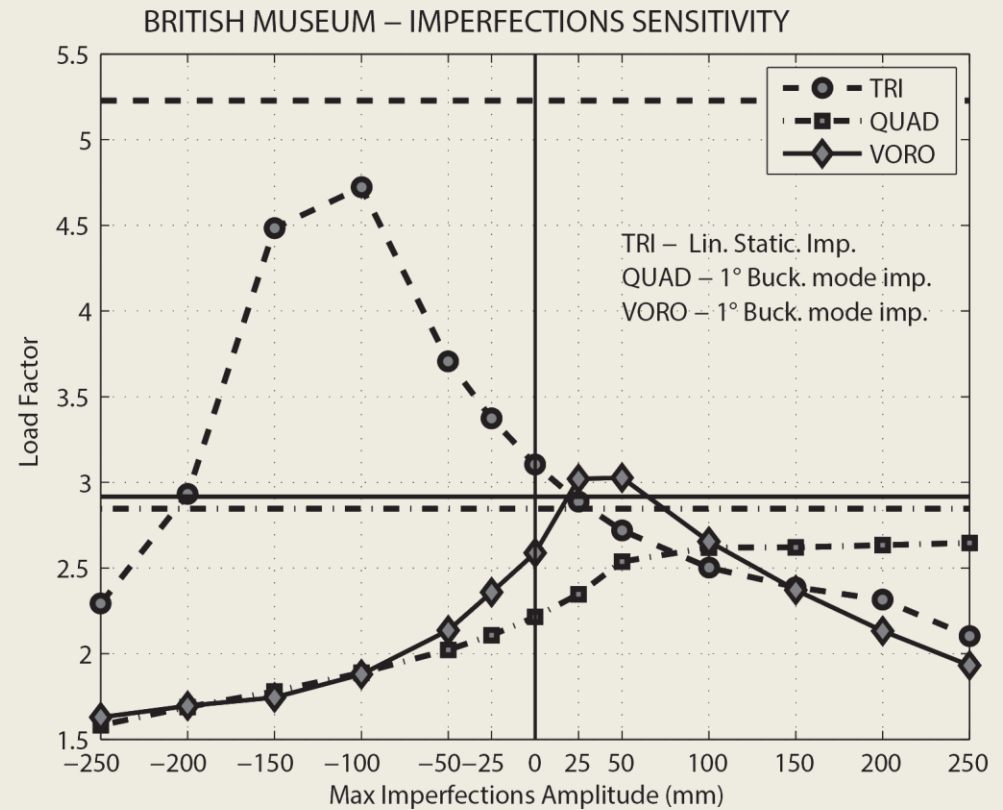
Performances — *sensibilità alle imperfezioni*

Neumunster dataset



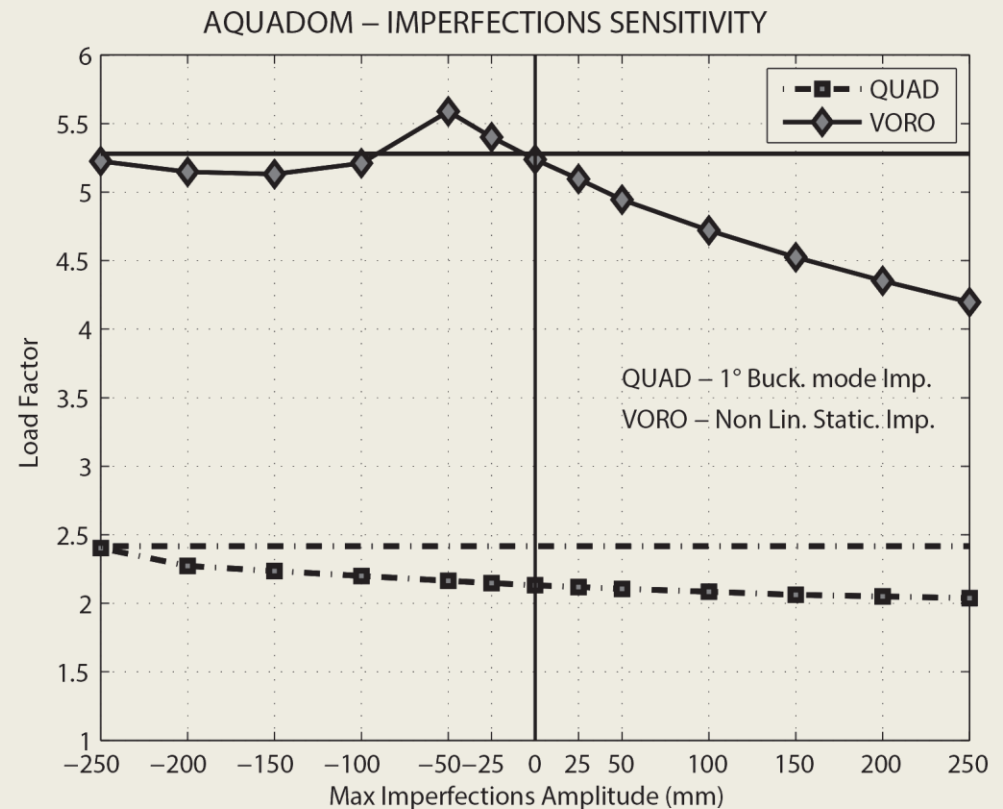
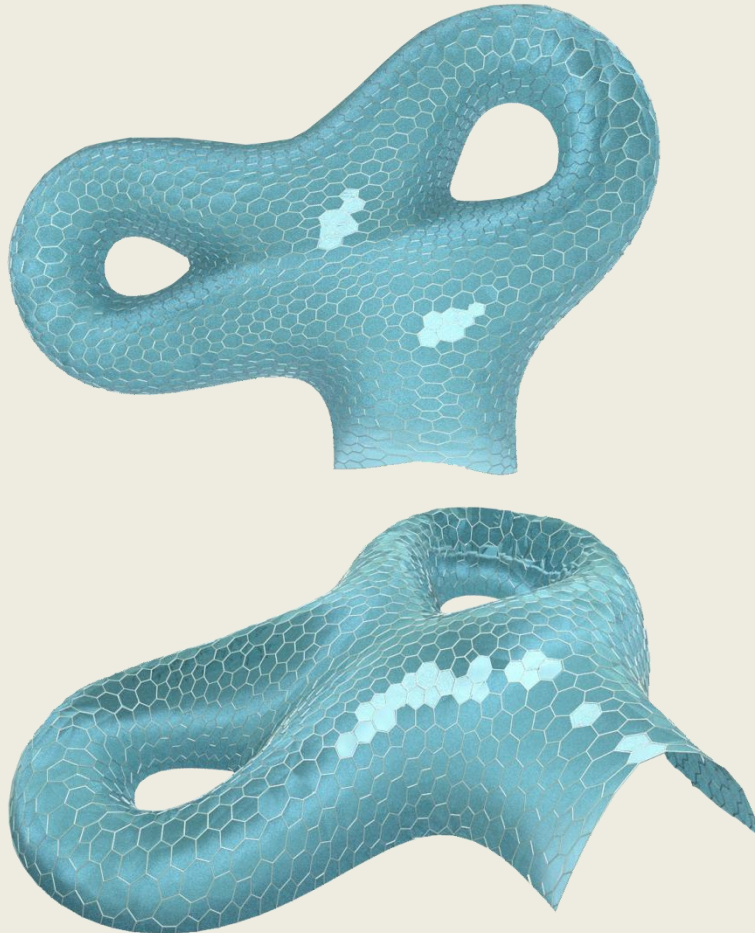
Performances - sensibilità alle imperfezioni

British Museum dataset



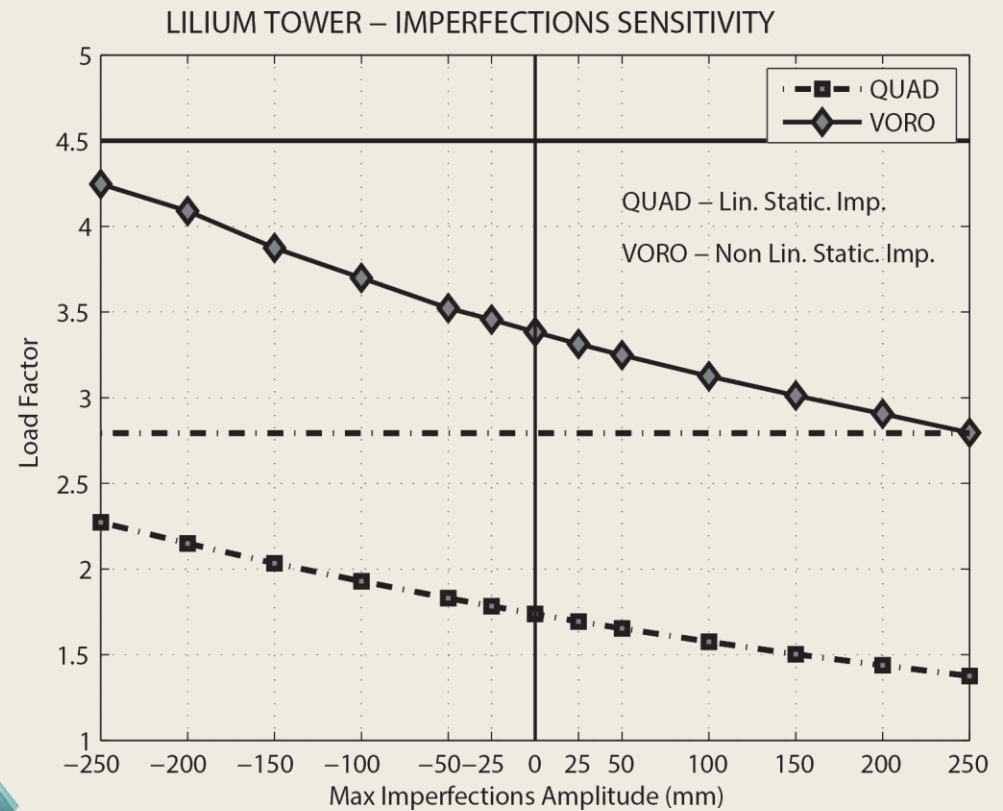
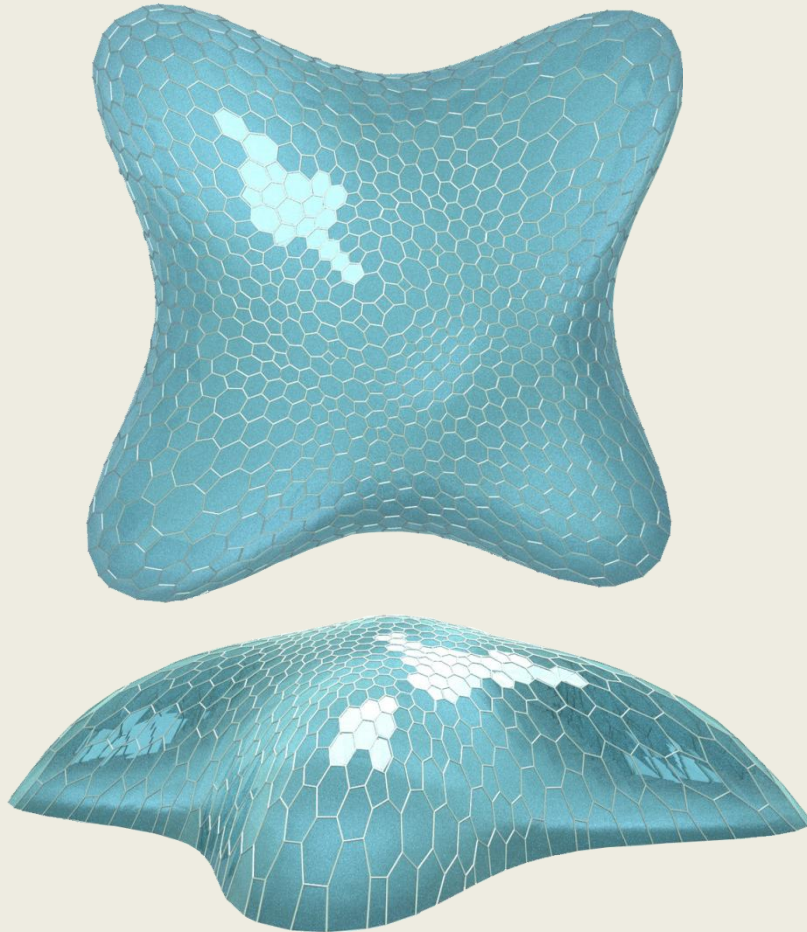
Performances - sensibilità alle imperfezioni

Aquadom dataset

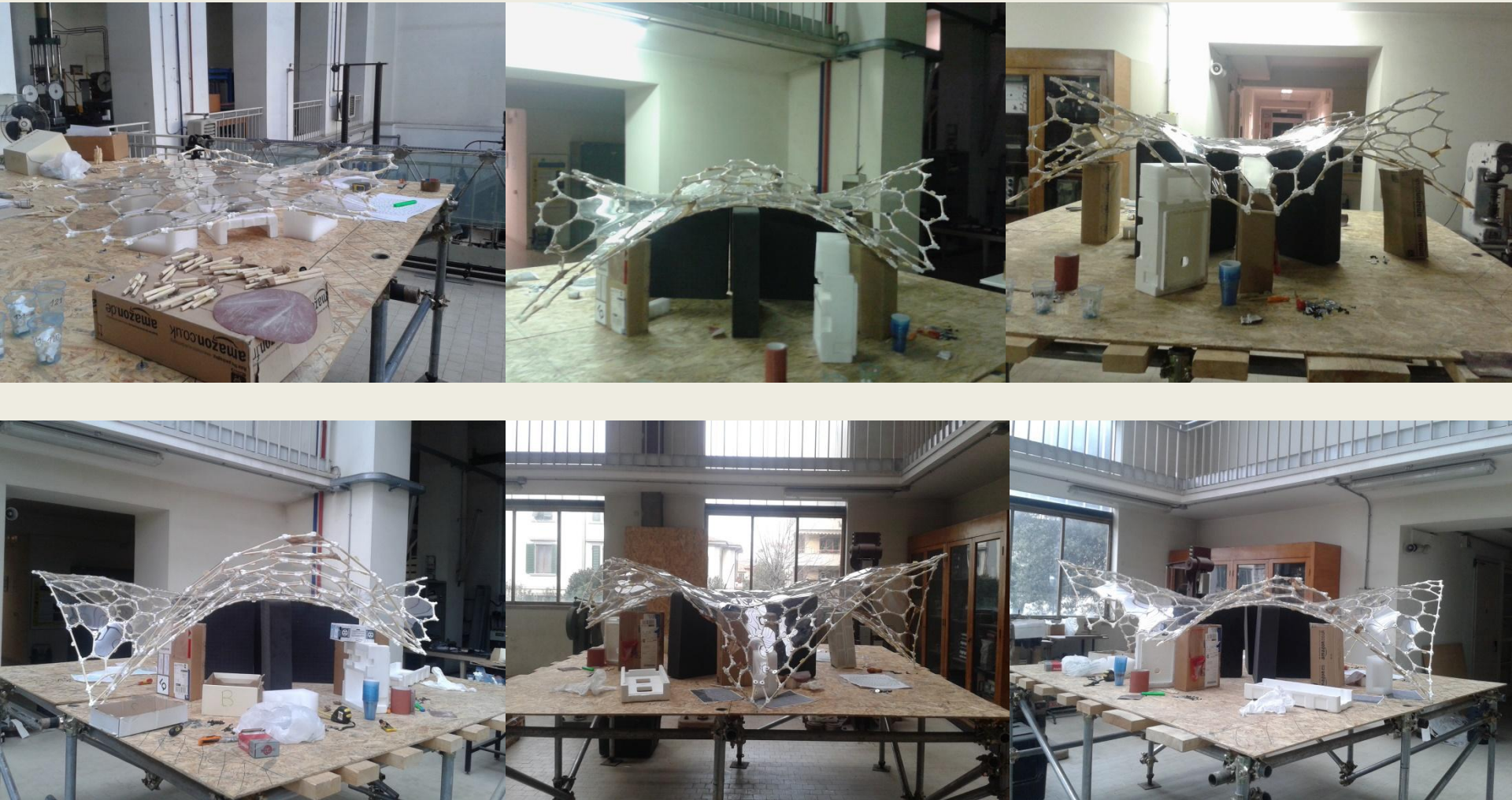


Performances - sensibilità alle imperfezioni

Botanic dataset



Un modello fisico in scala



Un modello fisico in scala



Conclusioni

Questa tesi fornisce:

- 1 - Una visione completa della meccanica delle grid-shells poligonali, in particolar modo di quelli a predominanza esagonale;
- 2 - Una proposta per una tipologia innovativa ed efficace di grid-shells free-form a predominanza esagonale: le ***'Statics Aware Voronoi Grid-Shells'***.



Grazie per l'attenzione

